ЗАМІНА ЗМІННИХ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Слід пам'ятати загальний орієнтир, коли заміна змінних може виконуватися без перетворення заданих тригонометричних виразів.

Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Розв'язання

Нехай $\sin x = t$, тоді одержуємо:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Звідси $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ маємо $\sin x = 3$ — рівняння не має коренів, оскільки $|3| > 1$.
2. При $t = \frac{1}{2}$ маємо $\sin x = \frac{1}{2}$,

тоді $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Коментар

Аналізуючи вигляд цього рівняння, помічаємо, що до нього входить тільки одна тригонометрична функція $\sin x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\sin x = t$.

Після розв'язування квадратного рівняння необхідно виконати обернену заміну і розв'язати одержані найпростіші тригонометричні рівняння.

Зауваження. Записуючи розв'язання прикладу 1, можна при введенні заміни $\sin x = t$ врахувати, що $|\sin x| \leqslant 1$, і записати обмеження $|t| \leqslant 1$, а далі зазначити, що один із коренів $t = 3$ не задовольняє умові $|t| \leqslant 1$, і після цього обернену заміну виконувати тільки для $t = \frac{1}{2}$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$.

Коментар

До заданого рівняння змінна входить тільки у вигляді $\operatorname{tg} 2x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\operatorname{tg} 2x = t$. Після виконання оберненої заміни і розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних рівнянь слід до відповіді записати всі одержані корені.

Розв'язання

Нехай $\operatorname{tg} 2x = t$. Тоді одержуємо $t^3 - t = 0$. Звідси $t(t^2 - 1) = 0$, тобто $t = 0$ або $t^2 - 1 = 0$. З останнього рівняння маємо $t^2 = 1$, тоді $t = 1$ або $t = -1$. Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = 0$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 0$, тоді $2x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Отже, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. При $t = 1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 1$, тоді $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi m$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$. Отже,

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

3. При $t = -1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = -1$, тоді $2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Отже,

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

При пошуку плану розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь можна скористатися таким орієнтиром.

1. *Пробуємо звести всі тригонометричні функції* ***до одного аргументу.***
2. *Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести* ***до однієї функції.***
3. *Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо звести рівняння* ***до однорідного.***
4. *В інших випадках переносимо* ***всі члени в один бік*** *і пробуємо* ***одержати добуток*** *або використовуємо* ***спеціальні прийоми розв'язування.***

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЗВЕДЕННЯМ ДО ОДНІЄЇ ФУНКЦІЇ (З ОДНАКОВИМ АРГУМЕНТОМ)

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Розв'язання

► Використовуючи формулу косинуса подвійного аргументу та основну тригонометричну тотожність, одержуємо:

Коментар

Усі тригонометричні функції зводимо до одного аргументу x, використовуючи формулу

$$\cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0,$$
$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0,$$
$$-2 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0.$$

Заміна $\sin x = t$ дає рівняння

$$-2t^2 - 5t - 2 = 0.$$

Тоді $2t^2 + 5t + 2 = 0$, $t_1 = -2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Виконуємо обернену заміну.

1. При $t = -2$ маємо $\sin x = -2$ — коренів немає, оскільки $|2| > 1$.
2. При $t = -\frac{1}{2}$ маємо $\sin x = -\frac{1}{2}$. Тоді

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Потім усі тригонометричні вирази зводимо до однієї функції $\sin x$ (враховуємо, що $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$).

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $\sin x$, отже, зручно виконати заміну $\sin x = t$.

Зауваження. При бажанні відповідь можна записати у вигляді

$$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3$.

Розв'язання

$\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$. Заміна: $\operatorname{tg} x = t$. Маємо рівняння $t + \frac{2}{t} = 3$.

При $t \neq 0$ отримуємо рівносильне рівняння $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = 1$ маємо $\operatorname{tg} x = 1$, тоді
$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$
2. При $t = 2$ маємо $\operatorname{tg} x = 2$, тоді
$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;
$\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Коментар

Усі аргументи вже однакові (x), тому зводимо всі тригонометричні вирази до однієї функції $\operatorname{tg} x$ (враховуємо, що $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $\operatorname{tg} x$, отже, зручно виконати заміну $\operatorname{tg} x = t$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОРІДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЗВЕДЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РІВНЯННЯ ДО ОДНОРІДНОГО

Розглянемо рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$. (1)

Для пошуку плану розв'язування цього рівняння (але не для його розв'язування) виконаємо заміни: $\sin x = u$, $\cos x = v$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0. \tag{2}$$

Усі одночлени, які стоять у лівій частині цього рівняння, мають степені 2 (нагадаємо, що степінь одночлена uv теж дорівнює 2). У цьому випадку рівняння (2) (і відповідно рівняння (1)) називається однорідним, і для розпізнавання таких рівнянь та їх розв'язування можна використовувати такий орієнтир.

> ***Якщо всі члени рівняння,*** *у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної),* ***мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається однорідним.*** *Розв'язується однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї із змінних.*

З а у в а ж е н н я. Дотримуючись цього орієнтира, доводиться ділити обидві частини рівняння на вираз із змінною. При цьому можна втратити корені (якщо коренями є ті числа, при яких дільник дорівнює нулю). Щоб уникнути цього, необхідно окремо розглянути випадок, коли вираз, на який ми збираємося ділити обидві частини рівняння, дорівнює нулю, і лише після цього виконувати ділення на вираз, що не дорівнює нулю.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв'язання

При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0$.
Одержуємо

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

тобто $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0$.

Тоді $\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$.
Заміна: $\mathrm{tg}\, x = t$.
Отримуємо рівняння $t^2 - t - 2 = 0$,
$t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Виконуємо обернену заміну:

1) При $t = -1$ маємо $\mathrm{tg}\, x = -1$, тоді
$x = \mathrm{arctg}\,(-1) + \pi n$,
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

2) При $t = 2$ маємо $\mathrm{tg}\, x = 2$, тоді
$x = \mathrm{arctg}\, 2 + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;
$\mathrm{arctg}\, 2 + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$. ◁

Коментар

Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий сумарний степінь 2. Його можна розв'язати діленням обох частин на $\sin^2 x$ або на $\cos^2 x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos^2 x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos x = 0$ розглянемо окремо.

Підставляючи $\cos x = 0$ в задане рівняння, одержуємо $\sin x = 0$. Але одночасно $\sin x$ і $\cos x$ не можуть дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Отже, ті значення змінної x, для яких $\cos x = 0$, не є коренями заданого рівняння. А при $\cos x \neq 0$ можна розділити обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x \neq 0$ і одержати рівняння, рівносильне заданому (та врахувати при цьому, що $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x$).

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $\mathrm{tg}\, x$, тому зручно виконати заміну $\mathrm{tg}\, x = t$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x = 5\cos 3x$.

Розв'язання

При $\cos 3x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos 3x \neq 0$.
Одержуємо

$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 5$, тобто $\mathrm{tg}\, 3x = 5$. Тоді

$$3x = \mathrm{arctg}\, 5 + \pi m,$$

$$x = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 5 + \frac{\pi m}{3},\ m \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 5 + \frac{\pi m}{3},\ m \in \mathbf{Z}$. ◁

Коментар

Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий степінь 1. Його можна розв'язати діленням обох частин на $\sin 3x$ або на $\cos 3x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos 3x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos 3x = 0$ розглянемо окремо.

Підставляючи $\cos 3x = 0$ в задане рівняння, одержуємо $\sin 3x = 0$. Але одночасно $\sin 3x$ і $\cos 3x$ не можуть дорівнювати нулю. Отже, при $\cos 3x = 0$ рівняння не має коренів. А при $\cos 3x \neq 0$ можна розділити обидві частини даного рівняння на $\cos 3x \neq 0$ і одержати рівняння, рівносильне заданому (і врахувати при цьому, що $\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \mathrm{tg}\, 3x$).

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $6\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x = 2$.

Розв'язання

▶ Використовуючи формулу синуса подвійного аргументу, маємо

$$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2. \quad (1)$$

Запишемо це рівняння так:

$$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2\cdot 1$$

і врахуємо, що $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Тоді $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Звідси

$$4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0. \quad (2)$$

При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0$. Одержуємо

$$4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0,$$

$$4\,\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}\, x - 3 = 0. \quad (3)$$

Заміна: $\mathrm{tg}\, x = t$. Отримуємо рівняння $4t^2 + t - 3 = 0$,

$$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{3}{4}.$$

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = -1$ маємо $\mathrm{tg}\, x = -1$, тоді
$$x = \mathrm{arctg}\,(-1) + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

2. При $t = \frac{3}{4}$ маємо $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{4}$, тоді
$$x = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

$\mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$. ◁

Коментар

Спочатку зведемо всі тригонометричні функції до одного аргументу x, використовуючи формулу $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

У лівій частині одержаного рівняння (1) *стоїть однорідний вираз другого степеня, а в правій частині — число* 2. *Якщо домножити* 2 *на* 1, *а одиницю розписати за основною тригонометричною тотожністю* $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, *то в лівій і правій частинах одержаного рівняння всі вирази будуть другого степеня, тобто одержимо однорідне рівняння* (2), яке можна розв'язати діленням обох частин або на $\sin^2 x$, або на $\cos^2 x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos^2 x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos^2 x = 0$ розглянемо окремо.

Підставляючи $\cos x = 0$ у рівняння (2), одержуємо $\sin x = 0$. Але одночасно $\sin x$ і $\cos x$ не можуть дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Отже, при $\cos x = 0$ рівняння (2) не має коренів. А при $\cos x \neq 0$ можна розділити обидві частини цього рівняння на $\cos^2 x \neq 0$ (і врахувати при цьому, що $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x$).

В одержане рівняння (3) змінна входить в одному і тому самому вигляді $\mathrm{tg}\, x$, через те зручно виконати заміну $\mathrm{tg}\, x = t$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ВИДУ $f(x) = 0$ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin 7x = \sin 5x$.

Розв'язання

▶ $\sin 7x - \sin 5x = 0$, тоді

$$2\sin\frac{7x - 5x}{2}\cos\frac{7x + 5x}{2} = 0,$$

$$2\sin x\cos 6x = 0.$$

Одержуємо:

Коментар

Досить важко всі тригонометричні функції в цьому рівнянні звести до одного аргументу.

У такому випадку доводиться користуватися четвертим пунктом орієнтира, наведеного на с. 170: *пере-*

$$\sin x = 0 \text{ або } \cos 6x = 0.$$

Розв'язуючи останні найпростіші тригонометричні рівняння, маємо:

$$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ або } 6x = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$\text{тобто } x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6},\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6},\ m \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

носимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.

Для цього скористаємося формулою перетворення різниці синусів у добуток:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Але якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із співмножників дорівнює нулю, а інші співмножники мають зміст. У даному випадку всі задані й одержані вирази мають зміст на всій множині дійсних чисел.

У кінці враховуємо, що задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\sin x = 0$ або $\cos 6x = 0$, і через те у відповіді мають бути записані всі корені кожного з цих рівнянь.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin x + \sin 3x = \sin 4x$.

Розв'язання

▶ $$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} - \sin 4x = 0,$$

$$2\sin 2x\cos x - \sin 4x = 0,$$

$$2\sin 2x\cos x - 2\sin 2x\cos 2x = 0,$$

$$2\sin 2x(\cos x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x = 0 \text{ або } \cos x - \cos 2x = 0.$$

З першого з цих рівнянь:

$$2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Друге рівняння перетворимо так:

$$-2\sin\frac{x+2x}{2}\sin\frac{x-2x}{2} = 0,$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0.$$

Звідси $\sin\frac{3x}{2} = 0$ або $\sin\frac{x}{2} = 0$.

З цих рівнянь одержуємо:

$$\frac{3x}{2} = \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}, \text{ або } \frac{x}{2} = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

$$x = \frac{2\pi m}{3} \text{ або } x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z};$

$\frac{2\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z};$

$2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Коментар

Зразу скористаємося четвертим пунктом орієнтира, наведеного на с. 170: *переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.*

Для цього застосуємо формулу перетворення суми синусів, яка стоїть у лівій частині рівняння, на добуток:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(і врахуємо, що $\cos(-x) = \cos x$).

Для того щоб винести який-небудь вираз за дужки і одержати добуток, досить записати $\sin 4x$ як синус подвійного аргументу (тоді за дужки виноситься $\sin 2x$).

Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із співмножників дорівнює нулю.

У другому з одержаних рівнянь перетворимо різницю косинусів на добуток. У кінці враховуємо, що всі задані і одержані вирази існують на всій множині дійсних чисел. Отже, задане рівняння на цій множині рівносильне сукупності рівнянь:

$$\sin 2x = 0 \text{ або } \sin\frac{3x}{2} = 0 \text{ або } \sin\frac{x}{2} = 0,$$

і тому до відповіді потрібно записати всі корені кожного з цих рівнянь.